Tournoi 2018 (corrigé lycée)

Bien divisibles

1) Un entier N s'écrit avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre.
Déterminer N sachant que pour k=2 et k=3 l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k.

L'entier formé par les 2 premiers chiffres de N étant divisible par 2, son chiffre des unités est pair et ne peut donc être que 2. Il reste deux possibilités pour N, 123 et 321, et elles conviennent puisque ces deux nombres sont divisibles par 3.

2) Existe-t-il un entier N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que pour k=2, k=3 et k=4 l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Pour la même raison que précédemment le deuxième chiffre de N doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Puisque N doit être divisible par 4 son chiffre des unités doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Il y a quatre possibilités pour N : 1234 et 3214 ne conviennent pas car ils ne sont pas divisibles par 4 ; 1432 et 3412 ne conviennent pas non plus car l'entier formé par les 3 premiers chiffres n'est pas divisible par 3. Il n'y a donc pas de solution.

3) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour k=2, k=3, k=4, k=5 et k=6 l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième et sixième chiffres de N doivent être pairs.
Le cinquième chiffre est nécessairement 5 car un entier divisible par 5 a son chiffre des unités égal à 0 ou 5.
Il y a donc deux possibilités : N = 1*3*5* ou N = 3*1*5* où chaque * représente un chiffre pair (2, 4 ou 6).
L'entier formé par les 3 premiers chiffres de N devant être multiple de 3, la somme des trois premiers chiffres doit être divisible par 3 : les trois premiers chiffres de N sont donc 123 ou 321.
Comme 1234 et 3214 ne sont pas divisibles par 4 les quatre premiers chiffres de N sont 1236 ou 3216.
Les deux entiers N=123654 et 321654 conviennent puisqu'ils sont divisibles par 6.

4) Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que pour k=2, k=3, k=4, k=5, k=6, k=7 et k= 8 l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième, sixième et huitième chiffres de N doivent être pairs et le cinquième chiffre est nécessairement 5.
La somme des six premiers chiffres de N doit être divisible par 3 ; comme la somme des chiffres de 1 à 8 vaut 36 qui est un multiple de 3, la somme des deux derniers chiffres de N doit être multiple de 3. N devant être divisible par 8 et comme 200 est divisible par 8, le nombre formé par les deux derniers chiffres de N doit aussi être divisible par 8 : c'est donc un multiple de 24 et la seule possibilité est 72. Il y a donc deux cas à étudier : N = 1*3*5*72 et N = 3*1*5*72, chaque * représentant un chiffre pair (4, 6, 8).
La somme des trois premiers chiffres doit être multiple de 3 donc le second chiffre est 8.
Le nombre formé par les quatre premiers chiffres doit être multiple de 4 donc le quatrième chiffre est 6.
Le sixième chiffre est alors 4. Comme 1836547 n'est pas divisible par 7 (après calcul) alors que 3816547 l'est, il y a une unique solution : <u>N = 38165472</u>.

Sans les multiples de 3

On écrit les entiers sauf les multiples de 3 comme l'indique le schéma suivant :

					…
				22	…
			14	*20*	…
		8	*13*	*19*	…
	4	*7*	*11*	*17*	*25*
1	*2*	*5*	*10*	*16*	*23*

Le nombre 17 est placé sur la 5^e^ colonne et au 2^e^ rang de cette colonne en partant du bas.

Sur quelle colonne sera placé le nombre 2018 et quel sera son rang ?
On admet que $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2018 = 3 × 672 + 2. Si on écrit les entiers de 1 à 2018 sauf les multiples de 3, il y a 672 entiers que l'on n'écrit pas, donc 2018 est le 2018 – 672 = 1346^e^ entier écrit.

Soit n le numéro de la colonne ou sera placé 2018. Le nombre 1346 est alors compris entre $\frac{n(n-1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2}$. On a donc $(2n-1)^2-1=4n(n-1)<8\times 1346=10768\leq 4n(n+1)=(2n+1)^2-1$ d'où $2n-1<\sqrt{10769}\cong 103.8\leq 2n+1$ qui donne <u>n = 52</u>.

Le rang de 2018 dans la 52^e^ colonne est égal à $1346-\frac{51\times 52}{2}$ = 1346 − 1326 = 20.

Tableaux symétriques

On veut former un tableau à n lignes et n colonnes, symétrique par rapport à sa première diagonale (celle qui débute en haut à gauche), de première ligne composée des nombres 1, 2, …, n dans cet ordre, les autres lignes étant des permutations de la première ligne.
Par exemple les permutations de (1 ;2 ;3) sont (1 ;2 ;3), (1 ;3 ;2), (2 ;1 ;3), (2 ;3 ;1), (3 ;1 ;2) et (3 ;2 ;1).

1) Montrez qu'il y a une seule possibilité pour n=2 et n=3.
Pour n=2 le seul tableau est $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Pour n=3 on a déjà par symétrie : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$. Puisqu'il y a symétrie par rapport à la première diagonale, chaque colonne est une permutation de la première colonne. Par conséquent la seconde ligne est nécessairement (2 3 1) et la troisième (3 1 2) . Il y a donc une unique solution : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2) Trouvez toutes les possibilités pour n=4.

Premier cas (avec la symétrie) : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$. On complète ensuite la seconde ligne (et la seconde colonne) par (4 3) d'où deux tableaux possibles : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Deuxième cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & & \\ 4 & 1 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Troisième cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & & \\ 4 & 3 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Il y a donc quatre tableaux convenables.

3) Parmi les cas précédents, dans quels cas la première diagonale est-elle une permutation de (1,2,…,n) ?
La première diagonale est une permutation de la première ligne dans un seul des tableaux précédents, celui obtenu pour n=3.

4) Généralisation : montrez que, si n est impair, la première diagonale est toujours une permutation de (1, 2, …, n) alors que, si n est pair, la première diagonale n'est jamais une permutation de (1, 2, …, n).
Chaque entier k, compris entre 1 et n, apparait n fois dans le tableau. Par symétrie il apparait un nombre pair de fois en dehors de la première diagonale.
Si n est impair, chaque entier k apparait donc un nombre impair de fois sur la première diagonale, donc au moins une fois, ce qui entraine que chaque entier k apparait exactement une fois sur la première diagonale qui est bien une permutation de la première ligne.
Si n est pair, chaque entier k apparait un nombre pair de fois sur la première diagonale qui n'est donc pas une permutation de la première ligne.

Carrés et cubes parfaits

*1) Combien y a-t-il de **carrés** parfaits, c'est-à-dire de **carrés** de nombres entiers, dans la suite de nombres :* $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots, 2018^{2018}$ *?*
Si k est un entier pair alors k^k est un carré parfait. Entre 1 et 2018 il y a 1009 entiers pairs.
Si k est un entier impair alors k^k n'est un carré parfait que si k lui-même est un carré parfait.
On calcule $44^2 = 1936 < 2018 < 45^2 = 2025$. Il y a donc 44 carrés parfaits inférieurs à 2018 dont 22 impairs.
Le nombre total de carrés parfaits dans la suite proposée est donc égal à 1009 + 22 = 1031.

*2) Combien y a-t-il de **cubes** parfaits, c'est-à-dire de **cubes** de nombres entiers, dans cette même suite ?*
Si k est un multiple de 3 alors k^k est un cube parfait. Entre 1 et 2018 il y a 672 multiples de 3.
Si k n'est pas un multiple de 3 alors k^k n'est un cube parfait que si k lui-même est un cube parfait.

On calcule $12^3 = 1728 < 2018 < 13^3 = 2197$. Il y a donc 12 cubes parfaits inférieurs à 2018 dont 8 qui ne sont pas multiples de 3.
Le nombre total de cubes parfaits dans la suite proposée est donc égal à 672 + 8 = 680.

3) Sachant qu'il y a exactement 2018 ***carrés*** *parfaits dans la suite de nombres 1^1 , 2^2 , 3^3 , 4^4, … , n^n , quelles sont les valeurs possibles pour l'entier n ?*
Le nombre de carrés parfaits dans la suite augmente avec n. L'entier n cherché est inférieur à 4036 puisque pour n = 4036 il y a déjà 2018 entiers pairs inférieurs ou égaux à n auxquels il faut ajouter les carrés impairs.
Le plus grand carré inférieur à 4036 est $63^2 = 3969$. Pour n = 3969 il y a 1984 entiers pairs inférieurs ou égaux à n auxquels il faut ajouter les 32 carrés impairs (de 1^2 à 63^2), donc au total 2016 carrés parfaits. Pour arriver à 2018 il manque seulement deux carrés parfaits. Le premier est obtenu pour n=3970, le second pour n = 3972. Il faut s'arrêter avant n = 3974 puisque cela ferait 2019 carrés parfaits.
Les valeurs possibles pour n sont donc <u>n = 3972</u> et <u>n = 3973</u>.

Remarque.
Il existe une formule pour le nombre de carrés parfaits dans la suite de nombres 1^1 , 2^2 , 3^3 , 4^4, … , n^n :
$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x (plus grand entier inférieur ou égal à x).
On peut écrire un programme sur une calculatrice qui détermine les entiers n tels que f(n) = 2018.